

Total No. of Printed Pages—16

4 SEM TDC GEMT (CBCS)

4.1/4.2/4.3

2 0 2 2

(June/July)

MATHEMATICS

(Generic Elective)

Paper : GE-4.1/4.2/4.3

Full Marks : 80

Pass Marks : 32

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

Paper : GE-4.1

(Algebra)

1. (a) Define the order of a group. 1
- (b) The set of integers with respect to usual multiplication does not form a group. Justify it. 2

(2)

(c) Let $*$ be defined on the set of all positive rational numbers Q^+ by $a * b = ab/2$. Show that Q^+ with the operation $*$ is an Abelian group. 5

(d) Describe the symmetries of a square. 5

Or

Show that every permutation of a finite set can be written as a cycle or as a product of disjoint cycles.

2. (a) What is symmetry of a triangle? 1

(b) How many lines of symmetry are there in an isosceles triangle? Explain. 3

(c) Prove that in a group there is only one identity element. 2

(d) If $(G, *)$ be a group, then show that $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$, for all $a, b \in G$. 3

Or

Prove that when $a, b \in G$, $(ab)^2 = a^2b^2$, if and only if G is an Abelian group.

3. (a) Define permutation group. 1

(b) How many generators are there in an infinite cyclic group? 1

(c) If a, b are any two elements of a group G , then show that the equations $ax = b$ and $ya = b$ have unique solutions in G . 4

Or

Prove that the set $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ is a group with respect to multiplication modulo 7.

4. (a) Give an example to show that a coset may not be a subgroup of a group. 1

(b) Let H and K be subgroups of G . Show that HK is a subgroup of G if and only if $HK = KH$. 4

(c) State and prove Lagrange's theorem. 5

5. (a) Define normal subgroup. 1

(b) Show that the centre of a group G is a subgroup of G . 3

(c) Show that subgroups $H = \{I, (12)\}$ and $K = \{I, (123), (132)\}$ are not normal in S_4 . 2

- (d) Show that a subgroup H of G is normal in G if and only if $xHx^{-1} \subseteq H$, for all x in G .

4

6. Answer any *two* of the following questions :

4×2=8

(a) State and prove fundamental theorem of cyclic groups.

(b) Prove that every quotient group of a cyclic group is cyclic.

(c) If G is a group such that $G/Z(G)$ is cyclic, where $Z(G)$ is centre of G , then show that G is Abelian.

(d) If H and K are finite subgroups of a group G , then show that

$$O(HK) = O(H) \cdot O(K) / O(H \cap K)$$

7. (a) Define an integral domain.

1

(b) Show that, in a ring R , $a \cdot 0 = 0$, for all $a \in R$.

2

(c) Find the addition and multiplication modulo 10 of the ring $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

4

8. (a) Show that, a non-zero finite integral domain is a field.

3

(b) Let $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ be the ring of integers. Show that E is the set of all even integers is an ideal of \mathbb{Z} . 3

(c) Prove that a non-empty subset S of a ring R is a subring of R , if and only if $a, b \in S \Rightarrow ab, a - b \in S$. 3

Or

Prove that for every prime p , \mathbb{Z}_p the ring of integers modulo p is a field.

9. (a) Let $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x + 3$ and $g(x) = 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 4$, where $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$. Find $f(x) + g(x)$ and $f(x) \cdot g(x)$. 2+2=4

(b) If D is an integral domain, then show that $D[x]$ is an integral domain. 4

Or

Show that the ideal $\langle x^2 + 1 \rangle$ is not prime in $\mathbb{Z}_2[x]$.

Paper : GE-4.2

(Application of Algebra)

1. (a) BIBD ব এটা উদাহরণসহ সংজ্ঞা দিয়া। 4+4=8
Define BIBD with an example.

- (b) তলৰ যি কোনো দুটা প্রমাণ কৰা : 4×2=8

Prove any *two* of the following :

(i) $bk = vr$

(ii) $\lambda(v-1) = r(k-1)$

(iii) $b \geq v$

আৰু সেয়ে $r > k$, য'ত প্রতীকবোৰে যথার্থতে বুজাব
লগা অর্থ প্রকাশ কৰিছে।

And therefore $r > k$, where the symbols
have their usual meanings.

2. (a) তলত দিয়াসমূহৰ সংজ্ঞা দিয়া : 2×4=8
Define the following :

- (i) এনকোডিং ফলন
Encoding function

- (ii) ডিকোডিং ফলন
Decoding function

(iii) হেমিং দূৰত্ব

Hamming distance

(iv) ভুল শুদ্ধকৰণ কোড

Error correcting code

(b) এটা কোড C ৰ বাবে দেখুওৱা যে তলৰ উক্তি দুটা সমতুল্য :

$$4+4=8$$

Given a code C , show that the following two statements are equivalent :

(i) C ৰ ন্যূনতম দূৰত্ব $d \geq 2$.

C has a minimum distance $d \geq 2$.

(ii) যদি d অযুগ্ম হয়, C য়ে $\frac{d-1}{2}$ টা ভুল শুদ্ধ কৰিব পাৰে।

If d is odd, C can correct $\frac{d-1}{2}$ errors.

3. (a) স্পেৰ্ছিকেল বিন্দুবোৰৰ সংহতিৰ সমমিতাৰ সংজ্ঞা দিয়া।
সমমিতাৰ গ্ৰুপ কি?

4

Define symmetry of a set of points in space. Define group of symmetry.

(b) এটা সংহতি X ৰ ওপৰত G গ্ৰুপৰ ক্ৰিয়াৰ সংজ্ঞা দিয়া।
এটা উদাহৰণ দিয়া।

4

Define action of a group G on a set X .
Give an example.

(c) ধৰা G এটা গ্ৰুপ আৰু X এটা সংহতি। দেখুওৱা যে—

Let G be a group and X a set. Show that—

(i) যদি X এটা G -set হয়, তেন্তে X ৰ ওপৰত G ৰ ক্ৰিয়াই এটা হ'ম'মৰ্ফিজম $\phi: G \rightarrow S_X$ ৰ সৃষ্টি কৰে;
if X is a G -set, then the action of G on X induces a homomorphism $\phi: G \rightarrow S_X$;

(ii) যি কোনো হ'ম'মৰ্ফিজমে $\phi: G \rightarrow S_X$ X ৰ ওপৰত G ৰ এটা 'অ'নটু' ক্ৰিয়া সৃষ্টি কৰে।

any homomorphism $\phi: G \rightarrow S_X$ induces an action of G onto X .

8

4. (a) তলত দিয়াসমূহৰ উদাহৰণসহ সংজ্ঞা দিয়া :

6

Define the following with examples :

(i) আইডেমপ'টেন্ট মেট্ৰিক্স

Idempotent matrix

(ii) নীলপ'টেন্ট মেট্ৰিক্স

Nilpotent matrix

(iii) ইনভলুট'বি মেট্ৰিক্স

Involutory matrix

(b) উদাহৰণসহ দ্বিঘাতীয় আকাৰৰ সংজ্ঞা দিয়া।

4

Define quadratic form with examples.

- (c) তলৰ দ্বিঘাতীয় আকাৰটো নৰ্মেল আকাৰলৈ নিয়া : 6

Reduce the following quadratic form into normal form :

$$Q(x, y, z) = xy + yz + zx$$

5. (a) বিদিউস্দ এশ্বিলন ফর্মলৈ নিবলৈ ব' বিদাক্ষন এলগ'বিথম ব্যৱহাৰ কৰা : 8

Use row reduction algorithm to reduce into reduced echelon form :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

- (b) A ব LU ফেকট'বাইজেশ্বন উলিওৱা : 8

Find an LU factorization of the following :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Paper : GE-4.3

(Combinatorial Mathematics)

1. তলত দিয়া প্রশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া : 1×8=8

Answer the following questions :

(a) যদি ${}^n C_8 = {}^n C_2$ হয়, তেন্তে ${}^n C_2$ ৰ মান নির্ণয় কৰা।If ${}^n C_8 = {}^n C_2$, then find ${}^n C_2$.

(b) প্রমাণ কৰা যে

Prove that

$${}^n P_r = {}^n C_r r!, \quad 0 < r \leq n$$

(c) ধৰা হওক A আৰু B যি কোনো দুটা সংহতি। দিয়া আছে $n(A)=2$, $n(B)=3$ আৰু $n(A \cap B)=1$. $n(A \cup B)$ ৰ মান নির্ণয় কৰা।Let A and B be any two sets. Given that $n(A)=2$, $n(B)=3$ and $n(A \cap B)=1$. Find $n(A \cup B)$.

(d) ভূয়স সম্বন্ধবোৰ কি কি ?

What are recurrence relations?

(e) ধৰা হওক $P_d(n)$ য়ে n ৰ বেলেগ বেলেগ অংশৰ partitionৰ সংখ্যা বুজায়। $P_d(6)$ ৰ মান নির্ণয় কৰা।Let $P_d(n)$ denotes the number of partitions of n into distinct parts. Find $P_d(6)$.

(f) Generating function বোঝাব সংজ্ঞা দিয়া।
Define generating functions.

(g) খালী ঠাই পূৰণ কৰা :

Fill in the blank :

$$C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_n = \underline{\hspace{2cm}}$$

(h) হাডামাৰ্ড (Hadamard) মৌলিককৰণ সংজ্ঞা দিয়া।
Define Hadamard matrix.

2. তলত দিয়া প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া :

2×9=18

Answer the following questions :

(a) 450 জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰী থকা এখন বিদ্যালয়ত 193 জনে বিজ্ঞান, 200 জনে বাণিজ্য পঢ়ে আৰু 80 জনে কোনো এটা বিষয় নপঢ়ে। দুয়োটা বিষয় পঢ়া ছাত্ৰ-ছাত্ৰী কিমান?

Out of 450 students in a school, 193 students read Science, 200 students read Commerce and 80 students read neither. Find out how many read both.

(b) প্ৰমাণ কৰা যে

$$S(n+1, k+1) \geq S(n, k)$$

যেতিয়া $n \geq 1, 1 \leq k \leq n$.

Prove that

$$S(n+1, k+1) \geq S(n, k)$$

whenever $n \geq 1, 1 \leq k \leq n$.

(c) সমাধান কৰা :

$$t_n = 4(t_{n-1} - t_{n-2})$$

দিয়া আছে $t_n = 1$ যেতিয়া $n = 0$ আৰু $n = 1$.

Solve

$$t_n = 4(t_{n-1} - t_{n-2})$$

given that $t_n = 1$ for $n = 0$ and $n = 1$.

(d) 10ৰ অযুগ্ম অংশৰ সকলোবোৰ integer partitions
নিৰ্ণয় কৰা।

Find all integer partitions of 10 into odd
parts.

(e) তলৰ বিস্তাৰটোৰ মাজৰ পদটো নিৰ্ণয় কৰা :

$$\left(2x + \frac{1}{x}\right)^8$$

Find the middle term in the expansion

$$\left(2x + \frac{1}{x}\right)^8$$

(f) $\left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right]$ ৰ কাৰণে এটা সৰল ৰাশি লিখা।

Find a simple expression for

$$\left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right]$$

(g) Combinatorial নজ্জা কি? ভেনে নজ্জাক কেতিয়া সমতুল্য বুলি কোৱা হ'ব?

What is combinatorial design? When is a design called balanced?

(h) Balanced incomplete block design (BIBD)ৰ সংজ্ঞা দিয়া। এটা BIBDক কেতিয়া Steiner triple system বুলি কোৱা হয়?

Define balanced incomplete block design (BIBD). When is a BIBD called Steiner triple system?

(i) n টা মৌল থকা symmetric group S_n ৰ cycle index নির্ণয় কৰা।

Find the cycle index of symmetric group S_n of n elements.

3. তলৰ প্রশ্নসমূহৰ যি কোনো ছয়টাৰ উত্তৰ দিয়া : $4 \times 6 = 24$

Answer any six of the following questions :

(a) এটা পৰীক্ষাৰ 12টা প্রশ্নৰ এখন প্রশ্নকাকত দুটা অংশত বিভক্ত হৈ আছে। প্রথম অংশত 5টা আৰু দ্বিতীয় অংশত 7টা প্রশ্ন আছে। এজন ছাত্ৰই 8টা প্রশ্নৰ উত্তৰ এনেদৰে দিব লাগে যাতে প্রতিটো অংশৰ পৰা অতি কমেও 3টাকৈ প্রশ্নৰ উত্তৰ দিব লাগে। তেন্তে এজন ছাত্ৰই কিমান ধৰণে প্রশ্নসমূহ বাচনি কৰিব?

In an examination, a question paper consists of 12 questions divided into two parts, i.e., part-I and part-II containing 5 and 7 questions respectively.

A student is required to answer 8 questions in all, selecting at least 3 from each part. In how many ways can a student select the questions?

- (b) দেখুওৱা যে $\{f_n\}$ ভূয়স সম্বন্ধ
 $f_n = -3f_{n-1} + 4f_{n-2}$ ৰ এটা সমাধান হ'ব, যদিহে
 $f_n = 2(-4)^n + 3$ হয়।

Show that the sequence $\{f_n\}$ is a solution of the recurrence relation $f_n = -3f_{n-1} + 4f_{n-2}$, if $f_n = 2(-4)^n + 3$.

- (c) তলত দিয়া অনুক্রমটোৱে generate কৰা ফলনটো নিৰ্ণয় কৰা :

$$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$$

য'ত α এটা ধ্ৰুবক।

Find the generating function for the sequence

$$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$$

where α is a fixed constant.

- (d) সমাধান কৰা :

$$f_k - 8f_{k-1} + 16f_{k-2} = 0$$

য'ত $f_2 = 16$ আৰু $f_3 = 80$.

Solve

$$f_k - 8f_{k-1} + 16f_{k-2} = 0$$

where $f_2 = 16$ and $f_3 = 80$.

- (e) 5ব বিভাজন (partition)ৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা। এতেকে দেখুওৱা যে 5ব বেলেগ বেলেগ অংশলৈ পোৱা মুঠ বিভাজনৰ সংখ্যা 5ব অযুগ্ম অংশবোৰক লৈ পোৱা বিভাজনবোৰৰ সৈতে সমান হয়।

Find the number of partitions for 5. Hence show that partitions of 5 into distinct parts equal the number of partitions of 5 into odd parts.

- (f) স্বাভাৱিক representationত n বিন্দুৰ ওপৰত ডাইহেড্ৰাল গোট D_n ৰ cycle index নিৰ্ণয় কৰা।

Find the cycle index of the dihedral group D_n in its usual representation on n points.

- (g) (15, 21, 7, 5, 2) parameterবোৰৰ সৈতে এটা BIBDৰ অস্তিত্ব আছেনে? তোমাৰ উত্তৰ যুক্তিৰে বৰ্ণনা কৰা।

Does there exist a BIBD with parameters (15, 21, 7, 5, 2)? Explain your answer with justification.

4. তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যি কোনো পাঁচটাৰ উত্তৰ দিয়া : $6 \times 5 = 30$

Answer any five of the following questions :

- (a) Multinomial উপপাদ্যটো উল্লেখ আৰু প্ৰমাণ কৰা।
 $a^2 b^3 c^2 d^5$ ৰ সহগ $(a+2b-3c+2d+5)^{16}$ ৰ
 বিস্তাৰত নিৰ্ণয় কৰা। $4+2=6$

State and prove multinomial theorem.

Find the coefficient of $a^2 b^3 c^2 d^5$ in $(a+2b-3c+2d+5)^{16}$.

- (b) 100 তকৈ সৰু কিমান ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা আছে যাৰ উৎপাদক 2, 3 আৰু 5 নহয় ?

How many positive integers less than 100 is not a factor of 2, 3, and 5?

- (c) Derangementবোৰ কি কি? $1, 2, 3, 4, \dots, n$ মৌলসমূহৰ derangementবোৰৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

What are derangements? Find the number of derangements of the elements

$1, 2, 3, 4, \dots, n$

$1+5=6$

- (d) Burnside's lemmaটো উল্লেখ কৰি প্রমাণ কৰা।
State and prove Burnside's lemma.

- (e) Pólyaৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰি প্রমাণ কৰা।
State and prove Pólya theorem of counting.

- (f) তলত দিয়াবোৰৰ ওপৰত চমু টোকা লিখা : $3 \times 2 = 6$
Write short notes on the following :

- (i) Latin square design
(ii) t -design
