CODE: 34T MATH

2024

MATHEMATICS

Full Marks: 100

Pass Marks: 30

Time: Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Q.	No. 1 (a-j) carries 1 mark each	1×10	= 10
Q.	Nos. 2-13 carry 4 marks each	.4×12	= 48
Q.	Nos. 14-20 carry 6 marks each	6×7	= 42
		Total	= 100

1. Answer the following questions:

 $1 \times 10 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) State true **or** false : শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখা ঃ

Relation R in the set of population A of a town at a particular time given by $R = \{(x, y): x \text{ is husband of } y\}$ is reflexive but not symmetric.

এটা নির্দিষ্ট সময়ত এখন চহৰৰ জনসংখ্যাৰ সংহতি A ত সংজ্ঞাৱদ্ধ সম্বন্ধ $R = \{(x,y)\colon x,\ y$ ৰ গিৰিয়েক $\}$ প্রতিফলনীয় কিন্তু প্রতিসম নহয়।

(b) Write the condition of coplanarity of the lines $\vec{r}_1 = \vec{a}_1 + \lambda \vec{a}_2$ and $\vec{r}_2 = \vec{b}_1 + \mu \vec{b}_2$.

 $ec{r}_1=ec{a}_1+\lambda ec{a}_2$ আৰু $ec{r}_2=ec{b}_1+\mu ec{b}_2$ ৰেখান্বয় একে সমতলযুক্ত হোৱাৰ চৰ্তটো লিখা।

(c) Given $s = \{1, 2, 3, 4\}$. Find f^{-1} (if exist) of the function $f: s \to s$ defined by $f = \{(1, 4,), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

দিয়া আছে $s = \{1, 2, 3, 4\}$ । $f: s \to s$ লৈ সংজ্ঞাৱদ্ধ $f = \{(1, 4,), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ ফলনটোৰ f^{-1} উলিওৱা (যদি আছে)।

- (d) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, then find $|2^n A|$, for some $n \in \mathbb{N}$.
 - যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, তেন্তে যিকোনো $n \in \mathbb{N}$ ৰ বাবে $|2^n A|$ উলিওৱা।

(e) Find the second order derivative of the function log x with respect to x.

 $oldsymbol{x}$ সাপেক্ষে $\log oldsymbol{x}$ ফলনৰ দ্বিতীয় ঘাতৰ অৱকলজ উলিওৱা।

(f) Find the maximum value, if any, of the function f given by $f(x) = x^2$ on [-2, 1].

[-2,1] ত $f(x)=x^2$ ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ মান, যদি আছে, উলিওৱা।

(g) Let $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$. Are the vectors \vec{a} and \vec{b} equal? Explain.

ধৰা হ'ল $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}$ আৰু $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}+\vec{a}$ আৰু \vec{b} ভেক্টৰ সমান হয়নে ? ব্যাখ্যা কৰা।

(h) Find the distance between the two planes 2x + 3y + 4z = 4 and 4x + 6y + 8z = 12.

2x + 3y + 4z = 4 আৰু 4x + 6y + 8z = 12 সমতল দু'খনৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিওৱা।

(i) If A is a non-singular square matrix of order 3×3 such that |adj A| = 36, find |A|.

যদিহে A এটা 3×3 মাত্ৰাৰ অক্ষীয়মান বৰ্গ মৌলকক্ষ হয় যাতে |adj|A|=36, তেন্তে |A|ৰ মান উলিওৱা।

(j) Differentiate $\sin^2 x$ w.r.t. $\cos^2 x$. $\cos^2 x$ সাপেকে $\sin^2 x$ ৰ অৱকলজ উলিওৱা।

2. Draw the graph of inverse trigonometric function $f(x) = \cos^{-1} x$. Also mention its range and domain. 2+(1+1)=4 প্রতিলোম ত্রিকোণমিতীয় ফলন $f(x) = \cos^{-1} x$ ৰ লেখ অংকন কৰা। লগতে ইয়াৰ পৰিসৰ আৰু আদিক্ষেত্র উল্লেখ কৰা।

Or / অথবা

Find the principal value of $\cos^{-1}(-1/2)$. Also evaluate $\tan^{-1}(\sqrt{3})-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$. 2+2=4 $\cos^{-1}(-1/2)$ ৰ মুখ্য মান উলিওৱা। লগতে $\tan^{-1}(\sqrt{3})-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- 3. Answer (i) and (ii) **or** (a) and (b): উত্তৰ কৰা (i) আৰু (ii) **অথবা** (a) আৰু (b):
 - (i) If $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$, $x \neq 2/3$, then show that $(f \circ f)(x) = x$ for all $x \neq 2/3$.

 2

 যদি $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$, $x \neq 2/3$, তেন্তে দেখুওৱা যে সকলো $x \neq 2/3$ ৰ বাবে $(f \circ f)(x) = x$.
 - (ii) Find the slope of the tangent to the curve $y=3x^2-4x$ at x=4. 2 $y=3x^2-4x$ বক্ৰৰ x=4 বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা উলিওৱা। Or / অথবা
 - (a) Give examples of two functions $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ and $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ such that $g \circ f$ is injective but g is not injective. 2 দুটা ফলন $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ আৰু $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ৰ উদাহৰণ দিয়া যাতে $g \circ f$ আচ্ছাদক, কিন্তু g আচ্ছাদক নহয়।

- (b) Find the approximate change in the volume V of a cube of side x meters caused by increasing the side by 2%. 2
 এটা ঘনৰ প্ৰতিটো দাঁতি x মিটাৰ। দাঁতি 2%বাঢ়িলে আয়তন Vৰ আসন্ন পৰিৱৰ্তন নিৰ্ণয় কৰা।
- 4. Find the points of discontinuity of the greatest integer function defined by f(x) = [x], where [x] denotes the greatest integer less than or equal to x.

বৃহত্তম অখণ্ড ফলনৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয় f(x) = [x], য'ত [x] এ x তকৈ সৰু বা সমান বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা বুজায়। ফলনটোৰ বিছিন্নতাৰ সকলো বিন্দু উলিওৱা।

Or / অথবা

Find the value(s) of k so that the function f is continuous at $x = \pi/2$,

where
$$f(x) = \begin{cases} \frac{k\cos x}{\pi - 2x}, & x \neq \pi/2 \\ 3, & x = \pi/2 \end{cases}$$

 $x=\pi/2$ বিন্দুত f ফলন অবিছিন্ন হ'লে k ৰ মান উলিওৱা য'ত

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k \cos x}{\pi - 2x}, & x \neq \pi/2 \\ 3, & x = \pi/2 \end{cases}$$

5. Evaluate:

মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$$

Or / অথবা

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x dx}{1 + \sin x}$$

4

6. Find the area lying between the curve $y^2 = 4x$ and line y = 2x.

4

 $y^2=4x$ বক্ৰ আৰু y=2x ৰেখাডালে আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ কালি উলিওৱা।

- Or / অথবা

The area between $x = y^2$ and x = 4 is divided into two equal parts by the line x = a. Find the value of a.

 $x=y^2$ বক্ৰ আৰু x=4 সৰলৰেখাডালে আগুৰা ক্ষেত্ৰক যদিহে x=a সৰলৰেখাডালে দুটা সমান অংশত বিভক্ত কৰে, তেতিয়া হ'লে a ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

7. Write the order and degree (if defined) of the differential equation

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0. \text{ Verify that } y = \sqrt{1+x^2} \text{ is a}$$

solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1+x^2}$. 1+1+2=4

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$
 অৱকল সমীকৰণটোৰ ক্ৰম আৰু মাত্ৰা

(যদি আছে) লিখা। প্ৰত্যায়ন কৰা যে $y=\sqrt{1+x^2}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{1+x^2}$ অৱকল সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান।

Or / অথবা

Find a particular solution of the following differential equation satisfying the given condition:

$$x(x^2-1)\frac{dy}{dx}=1$$
; $y=0$ when $x=2$

তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণটোৰ প্ৰদত্ত চৰ্ত সিদ্ধ কৰাকৈ একোটা বিশেষ সমাধান উলিওৱা ঃ

$$x(x^2-1)\frac{dy}{dx}=1$$
; $y=0$ যেতিয়া $x=2$

8. Show that the family of curves for which the slope of the tangent at any point (x, y) on it is $\frac{x^2 + y^2}{2xy}$, is given by $x^2 - y^2 = cx$, where c is an arbitrary constant.

দেখুওৱা যে এটা বক্ৰ পৰিয়ালৰ যিকোনো বিন্দু (x,y) ত স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা $\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ হ'লে,

ইয়াৰ সমীকৰণটো হ'ব $x^2-y^2=cx$, য'ত c এটা যাদৃচ্ছিক ধ্ৰুৰক।

Or / অথবা

Solve the differential equation $(x+3y^2)\frac{dy}{dx} = y$ (y>0)

 $\left(x+3y^2\right)\frac{dy}{dx}=y$ (y>0) অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

- 9. Let $\vec{a}=\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+7\hat{k}$ and $\vec{c}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$. Find a vector \vec{d} which is perpendicular to both \vec{a} and \vec{b} and $\vec{c}.\vec{d}=15$. 4 ধৰা হ'ল $\vec{a}=\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+7\hat{k}$ আৰু $\vec{c}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ । \vec{d} ভেক্টৰটো \vec{a} আৰু \vec{b} উভয়ৰে ওপৰত লম্ব আৰু $\vec{c}.\vec{d}=15$ হ'লে, \vec{d} উলিওৱা।
- 10. Find the vector and the Cartesian equations of the lines that passes through the origin and (5, -2, 3).

মূলবিন্দু আৰু (5, – 2, 3) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ ভেক্টৰ আৰু কাৰ্টেজীয় সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

Or / অথবা

Find the vector and Cartesian equations of the planes that pass through the point (1, 0, -2) and the normal to the plane is $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$.

সমতলৰ ভেক্টৰ আৰু কাৰ্টেজীয় সমীকৰণ উলিওৱা যিয়ে (1,0,-2) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু যাৰ ওপৰত $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টৰ লম্বভাৱে থাকে।

11. Find the values of k so that the lines

$$\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2k} = \frac{z-3}{2}$$
 and $\frac{7-7x}{3k} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{3}$ are at right angles.

k ৰ মান উলিওৱা যাতে $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2k} = \frac{z-3}{2}$ ৰেখাডাল

$$\frac{7-7x}{3k} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{3}$$
 ্ৰেখাডালৰ লম্ব হয়।

- 12. An unbiased die is thrown twice. Let the event E be 'even number on the first throw' and F the event 'even number on the second throw'. Check the independence of the events E and F. 4

 এটা নিখুঁত পাশতি দুবাৰ দলিয়াই চোৱা হ'ল। ধৰা হ'ল, প্ৰথম দলিত যুগ্ম সংখ্যা পোৱা ঘটনাটো

 E আৰু দ্বিতীয় দলিত যুগ্ম সংখ্যা পোৱা ঘটনাটো F | E আৰু F ৰ স্বতন্ত্ৰতাৰ পৰীক্ষা কৰা।
- 13. In answering a question on a multiple choice test, a student either knows the answer or guesses. Let $\frac{3}{4}$ be the probability that he knows the answer and $\frac{1}{4}$ be the probability that he guesses. Assuming that a student who guesses at the answer will be correct with probability $\frac{1}{4}$. What is the probability that the student knows the answer given that he answered it correctly?

 4 বহু বিকল্পযুক্ত পৰীক্ষাৰ প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰোঁতে এজন ছাত্ৰই উত্তৰটো হয় জানে নহ'লে অনুমানব ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে। ধৰা হ'ল ছাত্ৰজনে উত্তৰটো জনাৰ সম্ভাৱিতা $\frac{3}{4}$ আৰু অনুমান সাপেক্ষে লিখাব সম্ভাৱিতা $\frac{1}{4}$ । অনুমান সাপেক্ষে লিখা উত্তৰ শুদ্ধ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা $\frac{1}{4}$ বুলি ধৰিলে যদি ছাত্ৰজনে উত্তৰটো শুদ্ধকৈ লিখে, তেন্তে তেওঁ যে উত্তৰটো জানে তাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

Or/ অথবা

A coin is biased so that the head is 3 times as likely to occur as tail. If the coin is tossed twice, find the probability distribution of number of tails.

এটা মুদ্ৰা ত্ৰুটীপূৰ্ণ গাঠনিৰ বাবে টছ কৰিলে পুচ্ছতকৈ 3 গুণে বেছিকৈ মুগু প্ৰাপ্ত হয়। প্ৰাপ্ত পুচ্ছ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন উলিওৱা। 14. Answer (i) and (ii) or (a) and (b):

উত্তৰ কৰা (i) আৰু (ii) অথবা (a) আৰু (b) ঃ

- (i) If A and B are symmetric matrices of the same order, then prove that AB is symmetric if and only if AB = BA.
 A আৰু B দুটা একে ঘাতব সমমিত মৌলকক্ষ হ'লে দেখুওৱা যে AB ও সমমিত হ'ব যদি আৰু যদিহে AB = BA.
- (ii) Construct a 2×1 matrix A whose elements are given by $a_{ij}=2i-j$. Write A'. 1+1=2 এটা 2×1 মৌলকক্ষ A গঠন কৰা যাৰ মৌল দিয়া আছে $a_{ij}=2i-j$ । A' লিখা।

Or / অথবা

(a) Given
$$3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$$

Find the values of x, y, z and w.

4

দিয়া আছে

$$3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$$

 $x,\ y,\ z$ আৰু w ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Give example of 2×2 matrices A and B such that $AB \neq BA$.

 2×2 মেট্ৰিকা A আৰু Bৰ উদাহৰণ দিয়া যাতে $AB \neq BA$ ।

2

15. If a, b, c are positive and unequal, show that the value of the determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$
 is negative.

 $a,\ b,\ c$ ধনাত্মক আৰু অসমান হ'লে, দেখুওৱা যে নিণায়ক

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$
 ঋণাত্মক।

Or / অথবা

For the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, find the numbers a and b such that

 $A^2 + aA + bI = 0$ where I and 0 respectively are identity matrix and zero matrix of order 2×2. Also find A^{-1} . 4+2=6

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
 মৌলকক্ষটোৰ বাবে এনে দুটা a আৰু b উলিওৱা যাতে $A^2 + aA + bI = 0$

য'ত I আৰু 0 ক্ৰমে 2×2 মাত্ৰাৰ অভেদ মৌলকক্ষ আৰু শূন্য মৌলকক্ষ। লগতে A^{-1} উলিওৱা।

16. Answer (i) and (ii) or (a) and (b):

উত্তৰ কৰা (i) আৰু (ii) অথবা (a) আৰু (b) ঃ

(i) Find $\frac{dy}{dx}$, where

$$\sin^2 y + \cos xy = k$$
, k is an arbitrary constant.

 $\frac{dy}{dx}$ উলিওৱা, য'ত $\sin^2 y + \cos xy = k$, k এটা যাদৃচ্ছিক ধ্ৰুৱক।

(ii) If $y = \cos^{-1} x$, find $\frac{d^2y}{dx^2}$ in terms of y alone.

যদি $y = \cos^{-1} x$, অকল y ৰ মাধ্যমত $\frac{d^2y}{dx^2}$ উলিওৱা।

Or/ অথবা

Find $\frac{dy}{dx}$ ($\frac{dy}{dx}$ উলিওৱা) ঃ

4+2=6

- (a) $(\cos x)^y = (\cos y)^x$
- (b) $x = a (\theta + \sin \theta)$ $y = a (1 - \cos \theta)$
- 17. Find the values of x for which $y = x^2 (x-2)^2$ is an increasing function.

x ৰ কি মানৰ কাৰণে $y=x^2\ (x-2)^2$ ফলনটো এটা বৰ্ধমান ফলন হয় উলিওৱা।

[12]

(i) Show that the function given by $f(x) = \sin x$ is strictly decreasing in $(\pi/2, \pi)$.

দেখুওৱা যে $f(x)=\sin x$ ৰ দ্বাৰা নিৰ্দিষ্ট ফলনটো $(\pi/2,\pi)$ ত সতত হ্ৰাসমান।

(ii) A balloon, which always remains spherical on inflation, is being inflated by pumping in 900 cubic centimetres of gas per second. Find the rate at which the radius of the balloon increases when the radius is 15 cm.

এটা বেলুন ফুলালেও গোলাকাৰ হৈ থাকে। প্ৰতি ছেকেণ্ডত 900 ঘন ছেমি গেছ পাম্প কৰি বেলুনটো ফুলোৱা হ'ল। বেলুনটোৰ ব্যাসার্ধ কি হাৰত বৃদ্ধি হয় উলিওৱা যেতিয়া ব্যাসার্ধ 15 ছেমি.

18. Evaluate: (any two)
মান নির্ণয় কৰাঃ (যিকোনো দুটা)

3+3=6

(i)
$$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx$$

(ii)
$$\int_{0}^{1} xe^{x^2} dx$$

(iii)
$$\int x (\log x)^2 dx$$

19. Find the area of the triangle with vertices A(1, 1, 2), B(2, 3, 5) and C(1, 5, 5).

এটা ত্ৰিভুজৰ শীৰ্যবিন্দুৰ স্থানাংক A(1,1,2), B(2,3,5) আৰু C(1,5,5) হ'লে ত্ৰিভুজটোৰ কালি উলিওৱা।

Or / অথবা

For the given vectors $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ and $\vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, find the unit vector in the direction of the vector $\vec{a}+\vec{b}$. 2 $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ আৰু $\vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টৰ দুটা দিয়া আছে। $\vec{a}+\vec{b}$ ভেক্টৰটোৰ দিশত একক ভেক্টৰটো উলিওৱা।

(ii) Show that the points A(-2,3,5), B(1,2,3) and C(7,0,-1) are collinear.

দেখুওৱা যে A(-2,3,5), B(1,2,3) আৰু C(7,0,-1) বিন্দুকেইটা একেৰেখীয়।

20. Solve graphically the following linear programming problems: 6 লৈখিক নিয়মেৰে তলৰ ৰৈখিক প্ৰগ্ৰেমিং সমস্যাটোৰ সমাধান কৰা ঃ

Maximize and minimize Z = x + 2y

subject to

$$x + 2y \ge 100$$

$$2x - y \le 0$$

$$2x + y \le 200$$

$$x, y \ge 0$$

Z=x+2y ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা য'ত

$$x + 2y \ge 100$$

$$2x - y \le 0$$

$$2x + y \le 200$$

$$x, y \ge 0$$

A merchant plans to sell two types of personal computers—a desktop model and a portable model that will cost Rs. 25,000 and Rs. 40,000 respectively. He estimates that the total monthly demand of computers will not exceed 250 units. Determine the number of units of each type of computers which the merchant should stock to get maximum profit if he does not want to invest more than Rs. 70 lakhs and if his profit on the desktop model is Rs. 4,500 and on portable model is Rs. 5,000.

এজন ব্যৱসায়ীয়ে মেজত ৰখা আৰু পৰিবহণযোগ্য দুই ধৰণৰ ব্যক্তিগত কম্পিউটাৰ বনোৱাৰ পৰিকল্পনা কৰে যাৰ প্ৰতিটোৰ দাম ক্ৰমে 25,000 টকা আৰু 40,000 টকা। তেওঁ প্ৰাৰম্ভিক পৰিকল্পনা কৰি দেখিলে যে এনে ধৰণৰ কম্পিউটাৰৰ চাহিদা প্ৰতিমাহে 250 টকাতকৈ অধিক নহয়। যদি ব্যৱসায়ীজনে 70 লাখ টকাতকৈ অধিক বিনিয়োগ কৰিবলৈ নিবিচাৰে আৰু মেজত ৰখা আৰু পৰিবহণযোগ্য দুয়োবিধৰ প্ৰতিটোতে লাভৰ পৰিমাণ ক্ৰমে 4,500 টকা আৰু 5,000 টকা হয়, তেন্তে প্ৰতিবিধৰ কিমানকৈ কম্পিউটাৰ বনালে লাভৰ পৰিমাণ সৰ্ব্বোচ্চ হ'ব ?